以下では, 単純かつ孤立点を持たない graph だけを扱います. graph G が与えられると, box complex と呼ばれる abstract simplicial complex $\mathsf{B}(G)$ を考えることができます. $\mathsf{B}(G)$ の定義から, 多面体 $\|\mathsf{B}(G)\|$ 上に不動点を持たない $\mathbb{Z}_2$-action と $\mathbb{Z}_2$-index を自然に定義することができ, それを用いて graph G の彩色数 $\chi(G)$ の下界が与えられることが知られています. 一方, いくつかの graph の例を除いて, box complex の幾何学的構造をその定義から直接捉えることは難しく, box complex の $\mathbb{Z}_2$-index を計算する一般的な方法も知られていません.

graph の彩色数の下界を幾何学的な量で与える研究が進んだ背景の一つとして, 次の組合せ論の問題が位相幾何学を応用して解決されたことが挙げられます.

> $n, k \in \mathbb{N}$ で, $k \leq n$ とする. n 個の元からなる集合 N の k 個の元からなる部分集合全体からなる集合族を次の規則でクラス分けをする : k 個の元からなる 2 つの部分集合 K_1, K_2 に対し, $K_1 \cap K_2 = \phi$ ならば, K_1 と K_2 は異なるクラスに分ける. このとき, クラス分けに必要なクラスの数の最小値はいくつになるか？

上記の問題に対し, M. Kneser は $(n-2k+2)$ 個のクラスを用意して, 具体的に上記の規則に従ったクラス分けの方法を与え, これよりクラスの数を減らすことはできないと予想しました. 予想は L. Lovász により, Borsuk-Ulam の定理を用いて解決されました.

本講演では, 上述の研究の背景を紹介し, graph G の組合せ論的構造と box complex $\mathsf{B}(G)$ の幾何学的構造の関わりについて得られた結果を述べようと思います.